CONCOURS EXTERNE D'INGENIEURS DES TRAVAUX DE LA METEOROLOGIE

(MAI 1984)

EPREUVE DE MATHEMATIQUE I — DUREE : 3 heures — COEFFICIENT : 2

La rigueur et la clarté des raisonnements, ainsi que le soin dans la présentation, seront pris en compte dans l'évaluation des copies.

I

1°) Admettant provisoirement l'existence de solutions de l'équation différentielle :

$$(E_1) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}_+^*)$$

développable en série entière sous la forme :

$$y(x) = a_0 + a_1 x + \ldots\ldots\ldots + a_k x^k + \ldots\ldots\ldots,$$

trouver pour tout entier k, la relation liant les coefficients a_k et a_{k+2}.

2°) Si λ n'est pas entier, montrer qu'il existe effectivement des solutions de (E_1) développables en série entière, que l'on écrira et dont on précisera le rayon de convergence.

3°) Dans le cas particulier où $\lambda = n \in \mathbb{N}$, montrer l'existence de fonctions polynômes solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$, dont on précisera le degré. Existe-t-il des solutions non polynômiales ?

II

1°) Expliciter le polynôme $H_n(x)$ solution de :

$$(E_2) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + n y = 0 \qquad (n \in \mathbb{N}.)$$

dont le terme de plus haut degré en x a pour coefficient 1.

2°) Montrer que la dérivée $n^{ième}$ de la fonction :

$$U : x \longmapsto U(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

s'exprime sous la forme :

$$U^{(n)}(x) = e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot P_n(x)$$

où $P_n(x)$ est un polynôme dont on précisera le degré.

3°) Trouver une relation liant U(x) et U'(x) ; en déduire que la fonction z définie par :

$$z : x \longmapsto z(x) = U^{(n)}(x)$$

est solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre que l'on déterminera et que l'on notera (E_3).

4°) Remplaçant dans (E_3) la fonction inconnue z(x) par $e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot y(x)$, trouver une équation admettant pour solution $P_n(x)$. Exprimer $H_n(x)$ en fonction de $P_n(x)$.

5°) Trouver une relation entre $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$, $H_{n+2}(x)$ et une seconde relation entre $H'_{n+1}(x)$, $H_{n+1}(x)$, $H_{n+2}(x)$. En déduire une relation entre $H'_{n+1}(x)$ et $H_n(x)$.

III

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé d'axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ on définit, pour tout $R > 0$:

$D_R : x \geqslant 0 \; ; \; y \geqslant 0 \; ; \; \sqrt{x^2 + y^2} \leq R$

$K_R : x \in [0, R] \; ; \; y \in [0, R]$

On pose :

$$I(R) = \iint_{K_R} e^{-\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)} \, dx \, dy$$

$$J(R) = \iint_{D_R} e^{-\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right)} \, dx \, dy$$

1°) Calculer J(R).

2°) Démontrer la double inégalité

$$J(R) \leqslant I(R) \leqslant J(R\sqrt{2})$$

Calculer alors la limite de I(R) lorsque R augmente indéfiniment.

3°) Déduire du calcul précédent la valeur de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \, dx.$$

4°) U(x) désignant la fonction étudiée dans la partie II, calculer pour tout polynôme Q(x), de degré $k < n$, l'intégrale :

$$\left[Q, H_n \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} \cdot Q(x) \cdot H_n(x) \, dx$$

.../...

En déduire, pour m et n entiers naturels distincts la valeur de :

$$\left[H_m, H_n \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} . H_m(x) . H_n(x) . dx.$$

5°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\left[H_n, H_n \right] = n! \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{x^2}{2}\right)} dx.$$

et donner sa valeur.

IV

x désignant un nombre réel quelconque, soit ψ la fonction définie par :

$$\psi(x, t) = e^{\left(tx - \frac{t^2}{2}\right)} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

1°) Démontrer que cette fonction est développable en série entière en t de rayon de convergence infini sous la forme

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} . H_n(x)$$

2°) Retrouver la relation de récurrence entre $H_n(x)$, $H_{n+1}(x)$, $H_{n+2}(x)$ trouvée au II.
